Article type

Finding the Approximate Solution to a Nonlinear Equation in One Variable Using Integration

Hana louka*

Department of Mathematics, Faculty Abu Eisa, Zawiya University, Zawiya, Libya

ARTICLE INFO

Corresponding Email. h.louka@zu.edu.ly

Received: 23-07-2024
Accepted: 07-10-2024
Published: 28-10-2024

Keywords. *Percentage Error, Newton-Raphson Method, Nonlinear Equation.*

ABSTRACT

The research focuses on applying the solution method using integration to find approximate roots of a nonlinear equation. This is done by finding the integral of a function and then applying the steps of the numerical method, which facilitates finding the approximate solution to the nonlinear equation in a short amount of time. The results showed that using this method to compute the numerical solution of the nonlinear equation yields highly accurate results, with the degree of proximity to the actual values being the best. Additionally, it is an easy and quick method for calculations and plays a significant role in finding approximate solutions to higher-order nonlinear equations. When comparing the number of iterations required to find the solution using this method with other methods, the number of iterations is reduced compared to other numerical methods. However, the equality of the real roots with the approximate roots does not mean that this numerical method used to find the root is 100% accurate, as the calculated results in the previous examples were approximated to four and eight decimal places after the decimal point.

Cite this article. *Louka H. Finding the Approximate Solution to a Nonlinear Equation in One Variable Using Integration. Alq J Med App Sci. 2024;7(4):1094-1099.* https://doi.org/10.54361/ajmas.247425

AlQalam
Alq J Med App Sci

https://journal.utripoli.edu.ly/index.php/Alqalam/index eISSN 2707-7179

بحث اصلي

إيجاد الحل التقريبي للمعادلة الغير خطية في متغير واحد باستخدام التكامل

هناء لوكه

قسم الرياضيات، كلية التربية ابوعيسى، جامعة الزاوية، الزاوية، ليبيا

المستخلص

يهدف موضوع البحث في تطبيق طريقة الحل باستخدام التكامل لإيجاد الجذور التقريبية للمعادلة الغير خطية، ويتم ذلك عن طريق إيجاد تكامل دالة ومن ثم تطبيق خطوات الطريقة العددية والتي تسهل إيجاد الحل التقريبي للمعادلة الغير خطية في زمن قليل. أظهرت النتائج أن استخدام هذه الطريقة لحساب الحل العددي للمعادلة الغير خطية تكون النتائج دقيقة جدًا ومدى تقاربها من القيم الحقيقية هي الأفضل، بالإضافة لكونها طريقة سهلة وسريعة في الحساب ولها دور كبير في إيجاد الحل التقريبي للمعادلات الغير خطية من الدرجات العليا، وبمقارنة عدد التكرارات لإيجاد الحل بهذه الطريقة مع الطرق الأخرى سنجد أن عدد التكرارات يتقلص مقارنة مع الطرق العددية الأخرى. ولكن تساوي الجذور الحقيقية مع الجذور التقريبية لا يعني أن هذه الطريقة العددية التي تم استخدامها لإيجاد الجذر دقيقة مئة في المئة حيث أنه قد تم تقريب النتائج الحسابية في الأمثلة السابقة لأربعة وثمانية أرقام عشرية بعد الفاصلة.

المقدمة

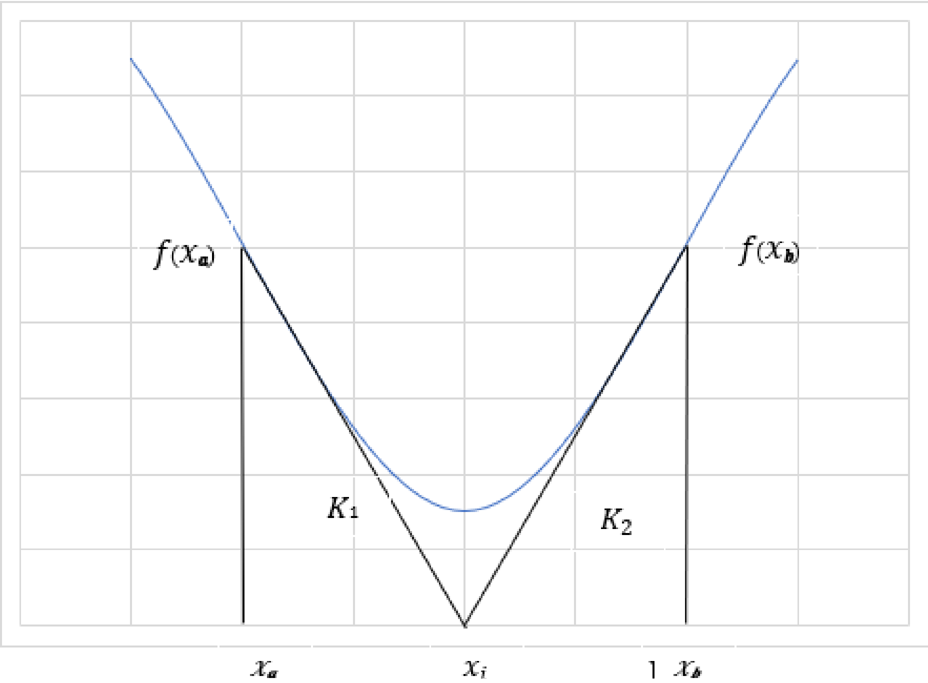
التحليل العددي هو أحد فروع الرياضيات المهمة التي تربط بين الرياضيات التحليلية والحاسب الألى، ويستخدم لحل المسائل التي يصعب حلها بالطرق التقليدية كحل المعادلات ذات الدرجات العالية أو التي يستغرق حلها وقتًا طويلاً [1-7]، ولكن يمكن حلها بالطرق العددية، وبالأخص في المعادلات التي تحتاج الى التكرار من اجل الوصول لحل تقريبي؛ وبالتالي فإن الحل المثالي هو أخذ النقاط التقريبية المقربة لقيمة الجذر، وكلما كان التكرار قليلاً كانت هذه الطريقة أفضل، وأما الدقة فهي الفارق بين الحل العددي التقريبي والحل المضبوط، وكلما كان الفارق صغيرًا كلما كانت الطريقة أفضل [1، 2، 7، 9]. لازالت عملية إيجاد حل المعادلات المعقدة والتي لا تملك حلاً مغلقًا أي لا توجد طريقة تعطي الحل الدقيق، لذلك يجب أن تحل بالطرق العددية والتي تعطي حلاً تقريبيًا للمعادلات المعقدة والغير قابلة للحل [8]. ونجد على سبيل المثال عند دراسة دالة ما $f(x)$ فإننا نقوم بحساب المشتقة $f'(x) = 0$ وفي بعض الأحيان يكون حلها صعبًا لذلك لابد من اللجوء الى الطرق العددية كطريقة نيوتن رافسون *Newton-Raphson Method* مثلاً وهذه الطريقة الجديدة ايضًا لها دور في إيجاد الحل التقريبي كباقي الطرق، ولكنها تتميز عن الطرق الأخرى أنها تستعمل التكامل [4، 6، 7، 9].

طرق الدراسة

البرهان الرياضي:

إن معظم المعادلات التي تظهر خلال التطبيقات العملية تكون غي خطية، وحل هذه المعادلات ليس بالأمر السهل لذلك نستخدم الطرق العددية للحصول على جذور تقريبية، ويتم ذلك باستخدام هذه الطريقة عن طريق إيجاد تكامل هذه الدالة مع فرض أن $c = 1$ ثم إيجاد تفاضلها وتطبيق خطوات الحل [3، 5].

لنفرض أن لدينا $f(x)$ معرفة ومتصلة على المجال $[x_a، x_b]$ و $x_i \in [x_a، x_b]$ نريد إيجاد الحل التقريبي لمشتقة الدالة $f'(x) = 0$ وليكن x_i حيث $i = (1,2,3, \dots)$ هو الحل التقريبي للمشتقة والذي يحقق الشرط $f'(x_i) = 0$ حيث $i = (1,2,3, \dots)$، نقول أن x_i هو الحل التقريبي للمشتقة $f'(x_i)$ على المجال $[x_a، x_b]$، ونفرض أن $K_1، K_2$ مثلثين متساويين في المساحة .



ومنه : بالنسبة للمثلث K_1
يمكننا حساب مساحة المثلث K_1 حسب الشكل الموضح بالرسم كالاتي:

$$K_1 = \frac{f(x_a)(x_i - x_a)}{2} \qquad (1)$$

بالنسبة للمثلث K_2
يمكننا حساب مساحة المثلث K_2 حسب الشكل الموضح بالرسم كالاتي:

$$K_2 = \frac{f(x_b)(x_b - x_i)}{2} \qquad (2)$$

$$\because K_1 = K_2$$

$$\therefore \frac{f(x_a)(x_i - x_a)}{2} = \frac{f(x_b)(x_b - x_i)}{2}$$

$$x_i[f(x_a) + f(x_b)] = x_b f(x_b) + x_a f(x_a)$$

$$\Longrightarrow x_i = \frac{x_b f(x_b) + x_a f(x_a)}{f(x_a) + f(x_b)} \qquad (3)$$

طريقة العمل:

الخطوة الأولى

- نكامل الدالة $f(x)$ ونفرض أن $c = 1$ دائمًا، ونأخذ تفاضل الدالة الجديدة ونرمز له بالرمز $f'(x)$ وهي بالأصل الدالة المراد إيجاد الحل التقريبي لها.
- لتكن $i = (1,2,3, \dots)$ ، $x_i \in [x_a،x_b]$، ويكون ذلك بتحقيق الشرط $f'(x_a)f'(x_b) < 0$.
- نحسب x_1 (هي العملية الأولى $i = 1$) باستعمال المعادلة (3).
- نحسب $f'(x_1)$ وإذا تحقق الشرط $f'(x_1) = 0$ إذا x_i هو الحل.
- إذا لم يتحقق الشرط نكمل العملية حسب لخطوة الثانية.

الخطوة الثانية

الحل التقريبي لها في هذه الخطوة نحسب x_2 في مجال جديد كالتالي:

- نعلم أن $f'(x_a)f'(x_b) < 0$

المرحلة الأولى

1. إذا كان $f'(x_a) < 0$ فإن $f'(x_a) > 0$ ، وكانت $f'(x_1) > 0$
نضع $x_b = x_1$ ويصبح المجال $[x_a،x_1]$.
2. إذا كان $f'(x_a) < 0$ فإن $f'(x_a) > 0$ ، وكانت $f'(x_1) < 0$
نضع $x_a = x_1$ ويصبح المجال $[x_1،x_b]$.

ثم نحسب x_2 باستعمال المعادلة (3) وإذا تحقق الشرط $f'(x_2) = 0$ إذا x_2 هو الحل.
وإذا لم يتحقق الشرط نكمل الحساب بنفس مراحل الخطوة الثانية حتى يتحقق الشرط $f'(x_i) = 0$ حيث $i = (1,2,3, \dots)$.

المرحلة الثانية

1. إذا كان $f'(x_a) > 0$ فإن $f'(x_b) < 0$ ، وكانت $f'(x_1) > 0$
نضع $x_a = x_1$ ويصبح المجال $[x_1،x_b]$.
2. إذا كان $f'(x_a) > 0$ فإن $f'(x_b) < 0$ ، وكانت $f'(x_1) < 0$
نضع $x_b = x_1$ ويصبح المجال $[x_a،x_1]$.

ثم نحسب x_2 باستعمال المعادلة (3) وإذا تحقق الشرط $f'(x_2) = 0$ إذا x_2 هو الحل.
وإذا لم يتحقق الشرط نكمل الحساب بنفس مراحل الخطوة الثانية حتى يتحقق الشرط $f'(x_i) = 0$ حيث $i = (1,2,3, \dots)$.

مثال1: استخدم طريقة التكامل لإيجاد جذر المعادلة الغير خطية التالية: $f(x) = e^{-x} - -x$. علمًا بأن القيمة الصحيحة للجذر $x = 0.56714329$.

$$\because f(x) = e^{-x} - -x$$
$$\therefore \int f'(x_1)dx = \int (e^{-x} - x)dx = -e^{-x} - 0.5\,x^2 + c \cong -e^{-x} - 0.5x^2 + 1$$

على فرض أن $c = 1$ دائمًا

جدول 1. يبين نتائج الحل التقريبي للدالة $f(x) = e^{-x} - x$ باستخدام طريقة التكامل

$f(x) = -e^{-x} - 0.5x^2 + 1$					$f'(x) = e^{-x} - x$			
i	x_a	x_b	$f(x_a)$	$f(x_b)$	$f'(x_a)$	$f'(x_b)$	x_i	$f'(x_i)$
0	0.56714320	0.56714340	0.27203095	0.27203095	0.00000014	0.00000014		
1	0.56714320	0.56714340	0.27203095	0.27203095	0.00000014	0.00000014	0.5671433	0.0000001

مثال2: استخدم طريقة التكامل لإيجاد جذر المعادلة الغير خطية التالية: $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

$$\because f(x) = x^2 - 2x - 3$$
$$\therefore \int f'(x_1)dx = \int (x^2 - 2x - 3)dx = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + c \cong \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$$

على فرض أن $c = 1$ دائمًا

جدول 2. يبين نتائج الحل التقريبي للدالة $f(x) = x^2 - 2x - 3$ باستخدام طريقة التكامل

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$						$f'(x) = x^2 - 2x - 3$		
i	x_a	x_b	$f(x_a)$	$f(x_b)$	$f'(x_a)$	$f'(x_b)$	x_i	$f'(x_i)$
0	−2	0	0.3333	1	5	−3		
1	−2	0	0.3333	1	5	−3	−0.4999	−1.7502
2	−2	−0.4999	0.3333	2.2081	5	−1.7502	−0.6966	−1.1215
3	−2	−0.6966	0.3333	1.4019	5	−1.1215	−0.9469	−0.2095
4	−2	−0.9469	0.3333	2.6610	5	−0.2095	−1.0641	0.2605
5	−1.0641	−0.9469	2.6583	2.6610	0.2605	−0.2095	−1.0054	0.0216
6	−1.0054	−0.9469	2.6666	2.6610	0.0216	−0.2095	−0.9757	−0.0966
7	−1.0054	−0.9757	2.6666	2.6654	0.0216	−0.0966	−0.9905	−0.0379
8	−1.0054	−0.9905	2.6666	2.6664	0.0216	−0.0379	−0.9979	−0.0083

9	−1.0054	−0.9979	2.6666	2.6666	0.0216	−0.0083	−1.0016	0.0064
10	−1.0016	−0.9979	2.6666	2.6666	0.0064	−0.0083	−0.9997	−0.0011
11	−1.0016	−0.9997	2.6666	2.6666	0.0064	−0.0011	−1.0006	0.0024
12	−1.0006	−0.9997	2.6666	2.6666	0.0024	−0.0011	−1.0001	0.0004
13	−1.0001	−0.9997	2.6666	2.6666	0.0004	−0.0011	−0.9999	−0.0003
14	−1.0001	−0.9999	2.6666	2.6666	0.0004	−0.0003	−1	0

النتائج

لأجل مقارنة النتائج لنكتبها على شكل جدول ليتسنى لنا ملاحظة الفرق بينها من حيث تقارب القيم الحقيقية مع معرفة عدد التكرارات اللازمة للحصول على القيم التقريبية باستخدام طريقة التكامل:

جدول (3) يبين القيم الحقيقية والتقريبية لحل المعادلات الغير خطية باستخدام طريقة التكامل

المعادلة الغير خطية	القيمة الحقيقية	القيمة التقريبية باستخدام طريقة التكامل	عدد التكرارات اللازمة للحصول على القيم التقريبية باستخدام طريقة التكامل
$f(x) = e^{-x} - x = 0$	0.56714329	0.5671433	1
المعادلة الغير خطية	**القيمة الحقيقية**	**القيمة التقريبية باستخدام طريقة التكامل**	**عدد التكرارات اللازمة للحصول على القيم التقريبية باستخدام طريقة التكامل**
$f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$	−1	−1	14

جدول (4) يبين الخطأ النسبي المئوي[1] لجذر المعادلة الغير خطية التقريبي

المعادلة الغير خطية	باستخدام طريقة التكامل	عدد التكرارات اللازمة للحصول على القيم التقريبية باستخدام طريقة التكامل
$f(x) = e^{-x} - x = 0$	0.00000173%	1
المعادلة الغير خطية	**باستخدام طريقة التكامل**	**عدد التكرارات اللازمة للحصول على القيم التقريبية باستخدام طريقة التكامل**
$f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$	0	14

المناقشة

تنقسم المعادلات الرياضية إلى معادلات خطية ومعادلات غير خطية، ومعظم المعادلات التي تظهر خلال التطبيقات العملية والهندسية وحل هذه المعادلات ليل بالأمر السهل لذلك نستخدم الطرق العددية للحصول على حلول تقريبية [3، 5]، وكلما كان التكرار قليلاً كانت هذه الطريقة أفضل، وأما الدقة فهي الفارق بين الحل التقريبي والحل الدقيق، وكلما كان الفارق صغيرًا كلما كانت هذه الطريقة أفضل [1، 2، 7، 9].
أوضحت النتائج المدرجة في الجدول باستخدام طريقة التكامل أنها تعطي نتائج أقرب للحل الدقيق بأقل عدد تكرارات.

الاستنتاج

كشفت النتائج أن استخدام هذه الطريقة لحساب الحل العددي للمعادلة الغير خطية تكون النتائج دقيقة جدًا ومدى تقاربها من القيم الحقيقية هي الأفضل، بالإضافة لكونها طريقة سهلة وسريعة في الحساب ولها دور كبير في إيجاد الحل التقريبي للمعادلات الغير خطية من الدرجات العليا، وبمقارنة عدد التكرارات لإيجاد الحل بهذه الطريقة مع الطرق الأخرى سنجد أن عدد التكرارات يتقلص مقارنة مع الطرق العددية الأخرى.
ولكن تساوي الجذور الحقيقية مع الجذور التقريبية لا يعني أن هذه الطريقة العددية التي تم استخدامها لإيجاد الجذر دقيقة مئة في المئة حيث أنه قد تم تقريب النتائج الحسابية في الأمثلة السابقة لأربعة وثمانية أرقام عشرية بعد الفاصلة.

---

[1] الخطأ النسبي المئوي $= Percentage\ Error = \frac{|\text{القيمة الحقيقية} - \text{القيمة التقريبية}|}{\text{القيمة الحقيقية}} \times 100$

المراجع

1. ريتشاردل، بودرين. ج ، دوغلاس. التحليل العددي .ترجمة أبو صاع، محمد. العبيكان للنشر. 2014: 45-46.
2. سلفادوري، ماريو. بارون، ملفين. الطرق العددية في الهندسة. ترجمة يونس، عبدالأله. حديد، معروف. الصالحي، رشيد. دار الكتاب للنشر. 1982: 2.
3. صبح، محمد. الحربي، صالح. التحليل العددي وطرق حسابه العددية. مكتبة الرشد للنشر.2006: 1.
4. فضيلة، سعد. الرويعي، النفاتي. التحليل العددي للمهندسين. منشورات مكتب البحوث والاستشارات الهندسية. 2004: 140-144.
5. عيد، نصر الدين. التحليل العددي. منشورات جامعة حلب كلية العلوم.2011: 49-53.
6. نعمة، كوثر. التحليل العددي وطرق حسابه العددي باستخدام الماتلاب. الذاكرة للنشر والتوزيع. 2018: 37-39.
7. ناصر، صفاء. الرياضيات والتحليل العددي. دار اليازوري للنشر.2015: 277- 285.
8. السيد، ابوبكر. الطرق العددية والتحليل العددي. مكتبة الفلاح للنشر. 2012: 51.
9. السيد، عيسى. التحليل العددي. جامعة الملك سعود للنشر. 2011: 57-63.